

PERSOALAN PENUYGASAN

MASALAH PENUGASAN

Seperti masalah transportasi, masalah penugasan (assignment problem) merupakan kasus khusus dari masalah linear programming pada umumnya. Dalam dunia usaha (bisnis) dan industri, manajemen sering menghadapi masalah-masalah yang berhubungan dgn penugasan optimal dari bermacam-macam sumber yang produktif atau personalia yang mempunyai tingkat efisiensi yang berbeda-beda utk tugas yang berbeda pula. **Metode Hungarian** (Hungarian Method) adalah salah satu dari bbrp teknik pemecahan masalah penugasan.

Untuk dapat menerapkan metode Hungarian, jumlah sumber-sumber yg ditugaskan hrs sama persis dgn jumlah tugas yang akan diselesaikan. Selain itu, setiap sumber hrs ditugaskan hanya satu tugas. Jadi masalah penugasan akan mencakup sejumlah n sumber yg mempunyai n tugas. Ada $n!$ (n faktorial) penugasan yg mungkin dlm suatu masalah karena perpasangan satu-satu. Masalah ini dpt dijelaskan dengan mudah oleh bentuk matrik segiempat, dimana baris-barisnya menunjukkan sumber-sumber dan kolom-kolomnya menunjukkan tugas-tugas.

Masalah penugasan dapat dinyatakan secara matematis dalam suatu bentuk Program Linear sebagai berikut :

Minimumkan (Maksimumkan) :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

dengan kendala :

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1$$

dan $X_{ij} \geq 0$ ($X_{ij} = X_{ij}^2$) dimana C_{ij} adlh tetapan yang telah diketahui.

(1). Masalah Minimisasi

1.1. Jumlah baris = jumlah kolom

Suatu perusahaan kecil mempunyai 4 (empat) pekerjaan yg berbeda utk diselesaikan oleh 4 (empat) karyawan. Biaya penugasan seorang karyawan utk pekerjaan yg berbeda karena sifat pekerjaan yg berbeda-beda. Setiap karyawan mempunyai tingkat keterampilan, pengalaman kerja dan latar belakang pendidikan serta

latihan yg berbeda, sehingga biaya penyelesaian

pekerjaan yg sama oleh para karyawan yg berlainan juga berbeda. Biaya penugasan karyawan utk masing-masing pekerjaan adalah sbb :

Karyawan	Pekerjaan (Rp/Unit)			
	I	II	III	IV
A	15	20	18	22
B	14	16	21	17
C	25	20	23	20
D	17	18	18	16

Karena metode Hungarian mensyaratkan perpasangan satu-satu, maka ada $4!=24$ kemungkinan penugasan. Langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut :

(a). Merubah matriks biaya menjadi matriks opportunity cost, yaitu dgn memilih elemen terkecil dari setiap baris dari matriks biaya mula-mula utk mengurangi seluruh elemen (bilangan) dlm setiap baris.

Tabel Reduced-Cost Matriks

Karyawan	Pekerjaan (Rp/Unit)			
	I	II	III	IV
A	15-15	20-15	18-15	22-15
B	14-14	16-14	21-14	17-14
C	25-20	20-20	23-20	20-20
D	17-16	18-16	18-16	16-16

(b). Reduced Cost Matrix di atas terus dikurangi utk mendapatkan Total Opportunity Cost Matrix. Hal ini dicapai dgn memilih elemen terkecil dari setiap kolom pada reduced cost

matrix utk mengurangi seluruh elemen dlm kolom-kolom tsb. Pada contoh, hanya dilakukan pada kolom III karena semua kolom

lainnya telah mempunyai elemen yang bernilai nol. Bila langkah pertama telah menghasilkan paling sedikit satu nilai nol pada setiap kolom, langkah kedua ini dapat dihilangkan.

Total Opportunity Cost Matrix

Karyawan	Pekerjaan (Rp/Unit)			
	I	II	III	IV
A	0	5	3-2	7
B	0	2	7-2	3
C	5	0	3-2	0
D	1	2	2-2	0

Karyawan	Pekerjaan (Rp/Unit)			
	I	II	III	IV
A	0	5	1	7
B	0	2	5	3
C	5	0	1	0
D	1	2	0	0

(c). Mencari skedul penugasan dgn suatu total opportunity cost nol. Untuk mencapai penugasan ini dibutuhkan 4 "independent" dalam matrix. Ini berarti setiap karyawan hrs ditugaskan hanya utk satu pekerjaan dengan opp-cost- nol atau setiap pekerjaan hrs diselesaikan hanya oleh satu karyawan. Prosedur praktis utk melakukan test optimisasi adalah dgn menarik sejlh minimum grs horizontal dan /atau vertikal utk meliputi seluruh elemen bernilai nol dlm total-oppt-cost matrix.

Total Opportunity Cost Matrix

Karyawan	Pekerjaan (Rp/Unit)			
	I	II	III	IV
A	0	5	1	7
B	0	2	5	3
C	5	0	1	0
D	1	2	0	0

(d). Untuk merevisi total-opp-cost matrix, pilih elemen terkecil yg belum terliput garis-garis

(opp-cost terendah) untuk mengurangi seluruh elemen yg belum terliput. Kemudian tambahkan dgn jlh yg sama pd seluruh

elemen-elemen yg mempunyai dua garis yg saling bersilangan. Masukkan hasil ini pada matrix.

Revised Matrix & Test for Optimality

Karyawan	Pekerjaan (Rp/Unit)			
	I	II	III	IV
A	0	5-1	1-1	7-1
B	0	2-1	5-1	3-1
C	5-1	0	1	0
D	1-1	2	0	0

Revised Matrix & Test for Optimality

Karyawan	Pekerjaan (Rp/Unit)			
	I	II	III	IV
A	0	4	0	6
B	0	1	4	2
C	6	0	1	0
D	2	2	0	0

Skedul Penugasan : A - III = 18

B - I = 14

C - II = 20

D - IV = 10

Total Biaya = 68

1.2. Jumlah baris \neq jumlah kolom

Syarat untuk menyelesaikan persoalan penugasan dengan metode Hungarian adalah jumlah baris (jumlah pekerjaan) sama dengan jumlah kolom (jumlah karyawan).

Pada kasus persoalan dimana jumlah baris (jumlah pekerjaan) tidak sama dengan kolom (jumlah karyawan), maka harus menyeimbangkan jumlah baris = jumlah kolom. Tekniknya dengan menambah variabel *dummy* bernilai nol pada baris atau kolom. Jika baris $<$ kolom maka variabel *dummy dummy* ditambahkan pada baris, sebaliknya jika kolom $<$ baris, maka variabel *dummy* ditambahkan pada kolom.

Contoh :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15	20	18	22	21
B	14	16	21	17	15
C	25	20	23	20	17
D	17	18	18	16	18

Pertanyaan : Tentukan penugasan karyawan ke masing-masing pekerjaan dengan biaya pekerjaan yang minimum !

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15	20	18	22	21
B	14	16	21	17	15
C	25	20	23	20	17
D	17	18	18	16	18
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15-15	20-15	18-15	22-15	21-15
B	14-14	16-14	21-14	17-14	15-14
C	25-17	20-17	23-17	20-17	17-17
D	17-16	18-16	18-16	16-16	18-16
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	5	3	7	6
B	0	2	7	3	1
C	8	3	6	3	0
D	1	2	2	0	2
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	5	3	7	6
B	0	2	7	3	1
C	8	3	6	3	0
D	1	2	2	0	2
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	5-2	3-2	7	6
B	0	2-2	7-2	3	1
C	8	3-2	6-2	3	0
D	1	2-2	2-2	0	2
Dummy	0	0	0	0	0

Penyelesaian :

Karyawan	Biaya Pekerjaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	0	3	1	7	6
B	0	0	5	3	1
C	8	1	4	3	0
D	1	0	0	0	2
Dummy	2	0	0	2	2

Skedul Penugasan :

No.	Skedul Penugasan	Biaya (Rp)
1	A – I	15
2	B – II	16
3	C – V	17
4	D - IV	16
5	Dummy – III	0
Jumlah		64

2. Kasus Maksimisasi

Metode Hungarian untuk penyelesaian penugasan kasus minimisasi dapat juga diterapkan pada kasus maksimisasi. Aplikasi kasus maksimisasi yaitu tingkat keuntungan atau produktivitas kerja yang diperoleh perusahaan akibat penugasan karyawannya.

Kasus maksimisasi ini juga meliputi dua macam :

1. Jumlah Baris = Jumlah Kolom
2. Jumlah Baris \neq Jumlah Kolom

Contoh :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	10	12	10	8	15
B	14	10	9	15	13
C	9	8	7	8	12
D	13	15	8	16	11
E	10	13	14	11	17

Pertanyaan : Tentukan penugasan karyawan ke masing-masing pekerjaan dengan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan !

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	15-10	15-12	15-10	15-8	15-15
B	15-14	15-10	15-9	15-15	15-13
C	12-9	12-8	12-7	12-8	12-12
D	16-13	16-15	16-8	16-16	16-11
E	17-10	17-13	17-14	17-11	17-17

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	5	3	5	7	0
B	1	5	6	0	2
C	3	4	5	4	0
D	3	1	8	0	5
E	7	4	3	6	0

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	5	3	5	7	0
B	1	5	6	0	2
C	3	4	5	4	0
D	3	1	8	0	5
E	7	4	3	6	0

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	4	2	2	7	0
B	0	4	3	0	2
C	2	3	2	4	0
D	2	0	5	0	5
E	6	3	0	6	0

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	4	2	2	7	0
B	0	4	3	0	2
C	2	3	2	4	0
D	2	0	5	0	3
E	6	3	0	6	0

Penyelesaian :

Karyawan	Keuntungan Perusahaan (Rp)				
	I	II	III	IV	V
A	4	2	2	7	0
B	0	4	3	0	4
C	0	1	0	2	0
D	2	0	5	0	7
E	6	3	0	6	2

Skedul Penugasan :

No.	Skedul Penugasan	Keuntungan (Rp)	Skedul Penugasan	Keuntungan (Rp)
1	A - II	12	A - V	15
2	B - I	14	B - IV	15
3	C - V	12	C - I	9
4	D - IV	16	D - II	15
5	E - III	14	E - III	14
Jumlah		68	Jumlah	68

(kasus minimisasi) :

ACC mempunyai 4 pertandingan bola basket pada suatu malam tertentu. Kantor pusat bermaksud mengirim 4 tim pendamping ke empat pertandingan sedemikian sehingga total jarak yang harus ditempuh minimal. Jarak tiap tim pendamping ke lokasi tiap pertandingan ditunjukkan pada tabel berikut :

Tim	Lokasi Pertandingan			
	K	L	M	N
A	210	90	180	160
B	100	70	130	200
C	175	105	140	170
D	80	65	105	120

kasus maksimisasi

Sebuah perusahaan mempekerjakan 3 salesman untuk 3 daerah pemasarannya. Perkiraan penjualan setiap salesman untuk tiap daerah pemasaran ditunjukkan pada tabel berikut :

Salesman	Daerah Pemasaran		
	P	Q	R
A	25	31	35
B	15	20	24
C	22	19	17

SOAL TRANSPORTASI

Butiran gandum dipanen dan disimpan di tiga gudang penyimpanan 1, 2, dan 3. Kemudian butir-butir gandum tersebut dikirim ke penggilingan yang berlokasi di daerah lain yaitu A, B, dan C.

Setiap bulannya, jumlah butiran gandum yang tersedia di masing-masing gudang penyimpanan 1, 2, dan 3 adalah 150 ton, 175 ton, dan 275 ton. Sedangkan jumlah butiran yang diminta per bulan oleh penggilingan A, B, dan C berturut-turut adalah 200 ton, 100 ton, dan 300 ton.

Biaya pengiriman satu ton masing masing gandum dari gudang penyimpanan ke penggilingan berbeda-beda menurut jarak dan sistem transportasi yang digunakan. Biaya-biaya tersebut dituliskan dalam tabel berikut :

Gudang (Sumber)	Penggilingan (Tujuan)		
	A	B	C
1	6	8	10
2	7	11	11
3	4	5	12

Permasalahannya adalah berapa banyak ton gandum yang harus dikirim dari gudang penyimpanan ke tiap penggilingan setiap bulannya agar total biaya transportasi minimum