BAB IV

ANALISIS MARKOV

1. Pendahuluan

Model Rantai Markov dikembangkan oleh seorang ahli Rusia A.A. Markov pada tahun 1906. Pada umumnya Riset Operasional bertujuan untuk mengambil keputusan yang optimal atas suatu permasalahan. Namun Analisis markov digunakan untuk menghasilkan suatu informasi probabilistik yang dapat digunakan untuk membantu pengambilan keputusan. Dengan kata lain teknik-teknik yang lain dalam Riset Operasional pada umumnya merupakan teknik optimisasi sedangkan pada Analisis Markov merupakan teknik deskriptif.

Rantai Markov adalah suatu teknik matematik yang biasa digunakan untuk melakukan pembuatan model bermacam-macam sistem dan proses bisnis. Teknik ini dapat digunakan untuk memperkirakan perubahan-perubahan yang akan terjadi di waktu yang akan datang dalam variabel-variabel dinamis atas dasar perubahan-perubahan variabel tersebut di waktu lampau.

2. Ciri-ciri Proses Markov

Probabilitas Transisi adalah perubahan dari satu status ke status yang lain pada periode (waktu) berikutnya dan merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas.

Untuk lebih jelasnya akan digunakan sebuah contoh kasus pada kendaraan umum. Dalam kasus ini terdapat dua buah state (kondisi / status) yaitu narik dan mogok. Jadi kendaraan umum tersebut akan selalu berada pada salah satu dari dua state tersebut, jika tidak narik maka mogok.

Agar dapat digunakan dalam proses Markov dibutuhkan beberapa asumsi seperti berikut :

a. Jika state kendaraan saat ini adalah narik maka hanya ada dua kemungkinan untuk kondisi waktu (hari) berikutnya yaitu narik kembali atau mogok. Sehingga jumlah probabilitas transisi pada setiap baris adalah satu.
b. Probabilitas transisi itu tidak akan berubah untuk selamanya.
c. Probabilitas transisi hanya tergantung pada status sekarang bukan status periode sebelumnya.

3. Menyusun Probabilitas Transisi

Untuk menunjukkan cara penyusunan probabilitas transisi, akan digunakan contoh kasus diatas dengan probabilitas-probabilitas sebagai berikut:

Status (saat ini)	Banyaknya Mobil	
	Hari l	**Hari II**
Narik	120	144
Mogok	100	76
Jumlah	220	220

Table 3.1

Hari l	Hari II		Jumlah
	Narik	**Mogok**	
Narik	70	50	120
Mogok	74	26	100
Jumlah	144	76	220

Tabel 3.2

Dari tabel di atas dapat diperoleh Probabilitas Transisi sebagai berikut:

Hari l	Hari II	
	Narik	**Mogok**
Narik	70/120= 0,5833	50/120 = 0,4167
Mogok	74/100 = 0,74	26/100 = 0,26

Tabel 3.3

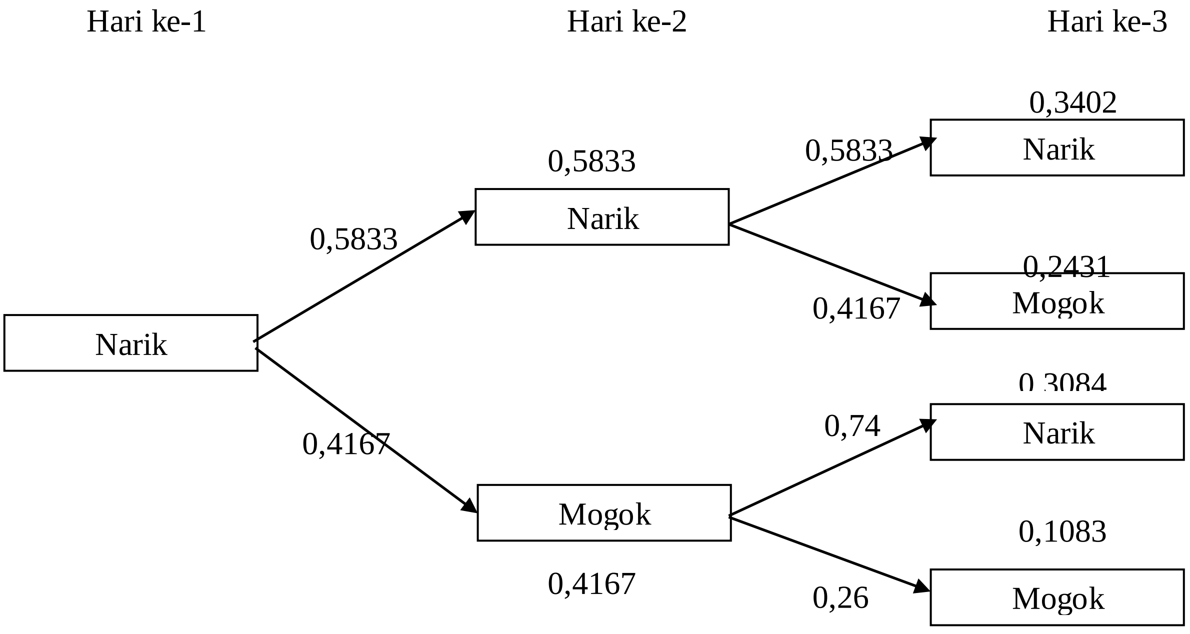
4. Probabilitas Tree

Probabilitas Tree merupakan cara yang mudah untuk menggambarkan sejumlah terbatas transisi dari suatu proses Markov. Agar lebih jelas kita masih akan mengambil contoh kasus di atas.

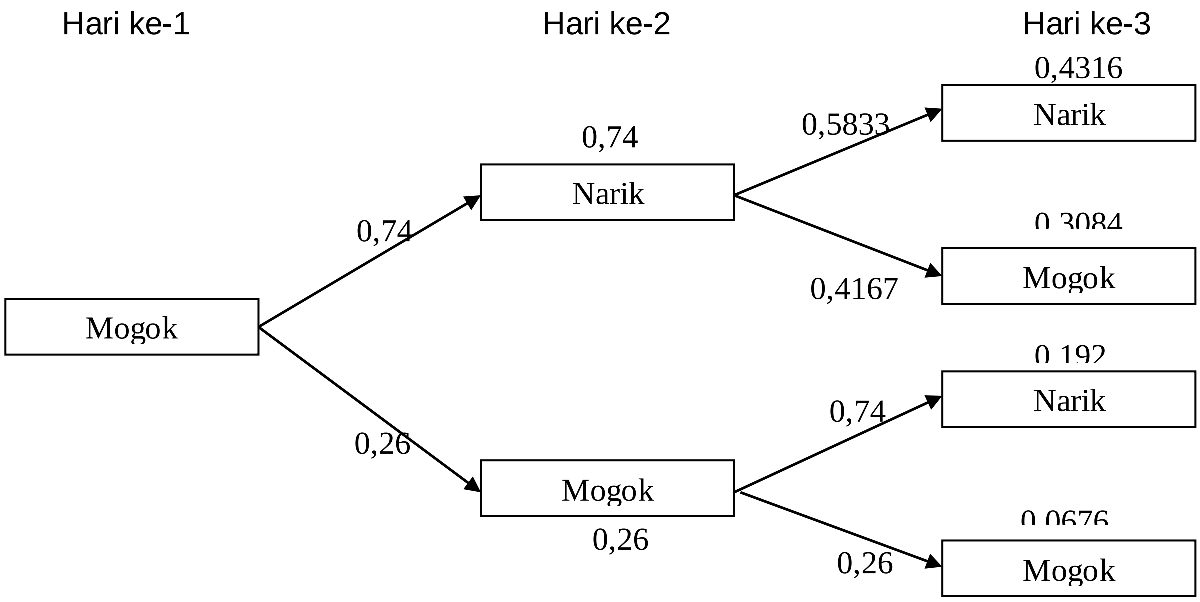
Semisal ingin diketahui :

a. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 narik
b. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik
c. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 mogok
d. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok

Maka kita akan buat Probabilitas Tree dari kasus di atas sebagai berikut:



Probabilitas Tree hari ke-1 narik



Probabilitas Tree hari ke-1 mogok

Dari gambar 3.1 dan Gambar 3.2 dapat kita jawab soal di atas, sehingga :

a. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 narik = 0,3402 + 0,3084 = 0,6486
b. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik = 0,2431 + 0,1083 = 0,3514
c. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 mogok = 0,4316 + 0,1924 = 0,642
d. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok = 0,3084 + 0,0676 = 0,376

5. Pendekatan Matriks

Ada kalanya kita harus mencari probabilitas pada periode yang sangat besar, misalkan periode hari ke-9, ke-10 dan seterusnya, akan sangat menyulitkan dan membutuhkan media penyajian yang khusus jika kita menggunakan Probabilitas Tree.

Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Pendekatan Matriks Probabilitas

Adapun Matriks Probabilitas dari contoh kasus di atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

Probabilitas kendaraan narik pada periode ke-i jika pada periode ke-1 narik, dilambangkan dengan:

Probabilitas Narik $\longrightarrow$ Nn(i) $\longleftarrow$ Periode ke-i

$\uparrow$

Status Awal Narik

Probabilitas kendaraan mogok pada periode ke-3 jika pada periode ke-1 mogok, dilambangkan dengan:

Probabilitas Mogok $\longrightarrow$ Mm(3) $\longleftarrow$ Periode ke-3

$\uparrow$

Status Awal Mogok

Jika kendaraan pada hari ke-1 narik maka berlaku probabilitas sebagai berikut: Nn(l) = 1 sedangkan Mm(l) = 0

Jika probabilitas di atas disusun ke dalam vektor baris, maka kita dapatkan:

(Nn(l) Mm(l)) = (l 0)

Adapun rumus untuk mencari probabilitas periode berikutnya (i+1) adalah: (Nn(i+1) Mn(i+1)) = (Nn(i) Mn(i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Bila rumus di atas kita gunakan untuk mencari probabilitas hari ke-2, maka:

$$(Nn(2) \quad Mn(2)) = (Nn(1) \quad Mn(1)) \times \begin{vmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \quad 0) \times \begin{vmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

$$= (0{,}5833 \quad 0{,}4167)$$

Terlihat bahwa hasilnya sama dengan yang diperoleh dengan menggunakan metode Probabilities Tree. Dengan menggunakan cara yang sama kita akan dapatkan status untuk periode-periode berikutnya sebagai berikut:

(Nn(3) Mn(3)) = (0,6486 0,3514)
(Nn(4) Mn(4)) = (0,6384 0,3616)
(Nn(5) Mn(5)) = (0,6400 0,3400)
(Nn(6) Mn(6)) = (0,6397 0,3603)
(Nn(7) Mn(7)) = (0,6398 0,3602)
(Nn(8) Mn(8)) = (0,6398 0,3602)

Terlihat bahwa perubahan probabilitas semakin lama semakin mengecil sampai akhirnya tidak tampak adanya perubahan. Probabilitas tersebut tercapai mulai dari periode ke-7, dengan probabilitas status:

(Nn(7) Mn(7)) = (0,6398 0,3602)

Ini berarti pemilik kendaraan dapat menarik kesimpulan bahwa jika awalnya kendaraan berstatus narik, setelah beberapa periode di masa depan probabilitasnya narik adalah sebesar 0,6398 dan probabilitasnya mogok adalah sebesar 0,3602.

Untuk perhitungan probabilitas status hari pertama mogok dapat kita cari dengan metode yang sama dan akan kita dapatkan probabilitas yang akan sama untuk periode selanjutnya, mulai dari periode ke-8. Adapun probabilitas pada periode ke-8 adalah:

(Nm(8) Mm(8)) = (0,6398 0,3602)

F. Probabilitas Steady State

Dalam banyak kasus, proses markov akan menuju pada Steady State (keseimbangan) artinya setelah proses berjalan selama beberapa periode, probabilitas yang dihasilkan akan bernilai tetap, dan probabilitas ini dinamakan Probabilitas Steady State. Dari contoh di atas Probabilitas Steady Statenya adalah probabilitas narik sebesar 0,6398 dan probabilitas mogok sebesar 0,3602.

Untuk mencari Probabilitas Steady State dari suatu Matriks Transisi, maka kita dapat menggunakan rumus:

(Nn(i+1) Mn(i+1)) = (Nn(i) Mn(i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Karena Steady State akan menghasilkan probabilitas yang sama pada periode ke depan maka rumus tersebut akan berubah menjadi:

(Nn(i) Mn(i)) = (Nn(i) Mn(i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Dari contoh kasus di atas dengan status hari ke-1 narik, maka kita dapatkan:

$$\begin{vmatrix} 0,5833 & 0,4167 \\ 0,74 & 0,26 \end{vmatrix}$$

Untuk mengurangi keruwetan, periode (i) dapat kita hilangkan, karena pada saat Steady State tercapai periode tidak akan mempengaruhi perhitungan. Sehingga perhitungan di atas akan menjadi:

$$(Nn \quad Mn) = (Nn \quad Mn) \times \begin{vmatrix} 0,5833 & 0,4167 \\ 0,74 & 0,26 \end{vmatrix}$$

Dari perhitungan di atas akan menghasilkan persamaan berikut:

Nn = 0,5833Nn + 0,74Mn ....(1)

Mn = 0,4167Nn + 0,26Mn .... (2)

Karena salah satu ciri proses markov adalah:

Nn(i) + Mn(i) = 1, maka:

Nn + Mn = 1 $\Rightarrow$ Mn = 1 - Nn

Dengan menstubstitusikan Mn = 1 -Nn ke persamaan (1) didapatkan:

Nn = 0,5833Nn + 0,74(l-Nn)

Nn = 0,5833Nn + 0,74 - 0,74Nn

l,1567Nn = 0,74

Nn = 0,6398

Lalu kita masukkan nilai Nn = 0,6398 ke dalam persamaan (2) didapatkan:

Mn = 0,3602

G. Penggunaan Probabilitas Steady State

Dari contoh kasus kita ketahui bahwa Pemilik Kendaraan memiliki 220 kendaraan. Dengan menggunakan Probabilitas Steady State yang sudah kita dapatkan, Pemilik dapat mengharapkan jumlah kendaraan setiap harinya narik atau mogok sebanyak:

Narik : Nn x 220 = 0,6398 x 220= 140,756 atau sebanyak 141 kendaraan

Mogok : Mn x 220 = 0,3602 x 220= 79,244 atau sebanyak 79 kendaraan

Misalkan Pemilik kurang puas dengan tingkat operasi yang ada dan ingin meningkatkannya, sehingga Pemilik mengambil kebijakan untuk menggunakan suku cadang asli dalam setiap perawatan armada. Kebijakan ini membuat Matriks Probabilitas Transisi berubah menjadi:

$$\begin{vmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

Artinya kebijakan ini membuat Probabilitas saat ini narik, lalu hari berikutnya mogok menurun dari 0,4 menjadi 0,3. Probabilitas Steady State yang baru adalah:

$$(Nn \quad Mn) = (Nn \quad Mn) \times \begin{vmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

Sehingga kita adpatkan persamaan berikut:

Nn = 0,7Nn + 0,74Mn……………………….(1)

Mn = 0,3Nn + 0,26Mn……………………..(2)

Substitusikan Nn = 1 - Mn ke persamaan (2), sehingga kita dapatkan:

Mn = 0,2885 dan Nn = 0,7116

Artinya setiap harinya Pemilik dapat mengharapkan kendaraan yang narik atau mogok sebanyak:

Narik : Nn x 220 = 0,7116 x 220 = 156,55 atau sebanyak 157 kendaraan

Mogok : Mn x 220 = 0,2885 x 220 = 63,47 atau sebanyak 63 kendaraan

Kebijakan tersebut menghasilkan kenaikan operasional dari 141 kendaraan perhari menjadi 157 kendaraan perhari. Dalam hal ini Pemilik harus mengevaluasi kebijakan ini, apakah kenaikan pendapatan operasional dapat menutupi kenaikan biaya operasional karena kebijakan ini. Misalkan karena kebijakan ini terjadi kenaikan biaya perawatan kendaraan sebesar Rp. 1.000.000,- setiap harinya. Jadi bila kenaikan pendapatan operasional lebih besar dari Rp. 1.000.000,- maka kebijakan tersebut layak untuk dijalankan.

Dari contoh ini menunjukkan bahwa Analisis Markov tidak memberikan solusi atau keputusan, namun analisis tersebut memberikan informasi yang dapat membantu pembuatan keputusan.

CONTOH SOAL :

1) Sebuah Restoran BIASA AJA telah berdiri sejak 3 tahun yang lalu. Sang Pemilik Restoran ingin mengetahui perkembangan usahanya tersebut. Berikut ini data-data yang diperoleh Sang pemilik restoran selama 2 tahun :

Keterangan	Tahun 1	Tahun 2
Untung	2325	2250
Rugi	2360	2435
Jumlah	4685	4685

Dalam waktu 2 tahun terakhir terdapat perubahan terhadap keuntungan dan kerugian pada restorannya. Untuk data lebih jelasnya, lihat tabel dibawah ini :

Tahun 1	Tahun 2		Jumlah
	Untung	Rugi	
Untung	525	1800	2325
Rugi	1725	635	2360
Jumlah	2250	2435	4685

Ditanya:

a. Buatlah tabel probabilitasnya!

b. Tentukanlah probabilitas tahun ke-3 mengalami rugi, jika pada tahun ke-1 untung !

c. Tentukanlah probabilitas tahun ke-3 mengalami rugi, jika pada tahun ke-1 rugi !

d. Tentukanlah probabilitas tahun ke-3 mengalami untung, jika pada tahun ke-1 untung !

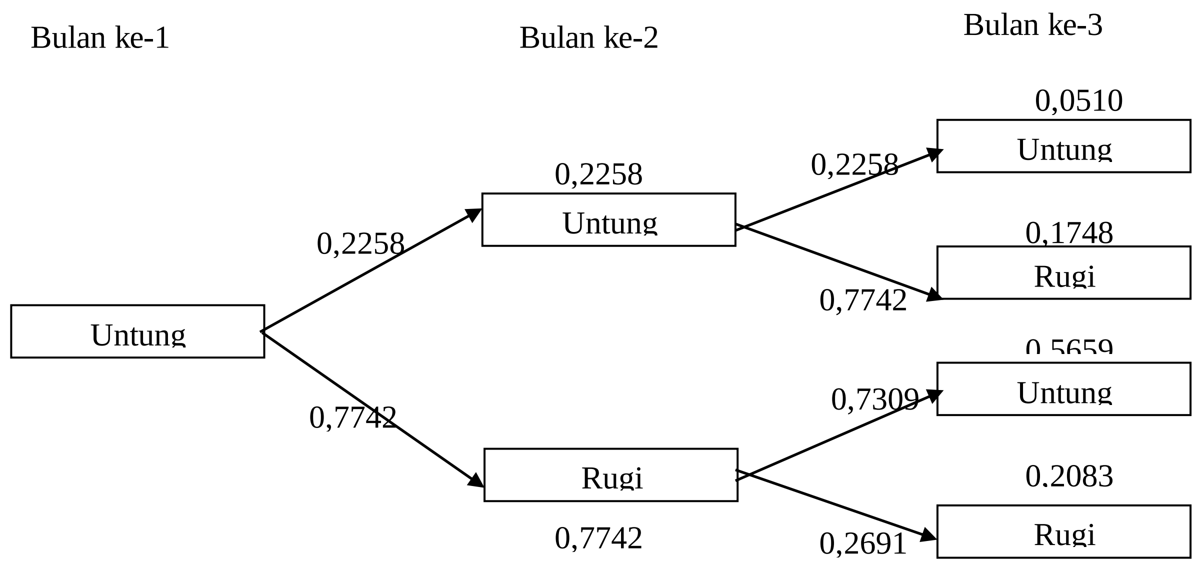
e. Tentukanlah probabilitas tahun ke-3 mengalami untung, jika pada tahun ke-1 rugi !

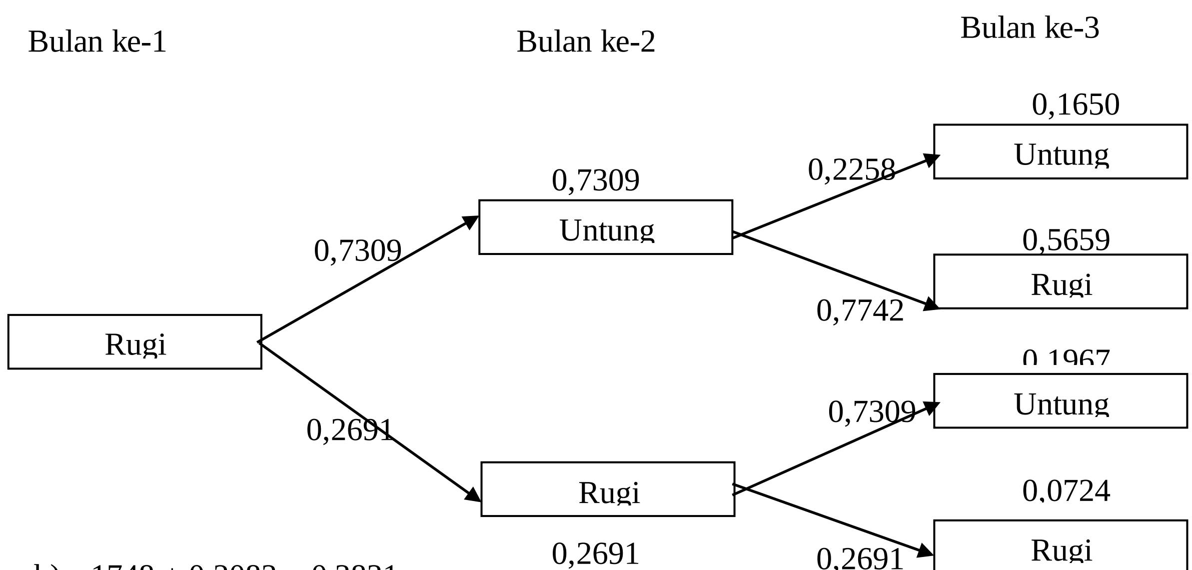
f. Tentukan probabilitas pada kondisi *Steady State*

Jawab :

a)

Tahun 1	Tahun 2	
	Untung	Rugi
Untung	525/2325=0,2258	1800/2325=0,7742
Rugi	1725/2360=0,7309	635/2360=0,2691





b) ,1748 + 0,2083 = 0,3831

c) 0,5659 + 0,0724 = 0,6383

d) $0,0501 + 0,5659 = 0,6168$

e) $0,1650 + 0,1967 = 0,3617$

Dalam menghitung *Steady State* dapat menggungakan cara seperti dibawah ini :

$X_1 = 0,2258 (X_1) + 0,7309 (1- X_1)$

$X_1 = 0,2258 X_1 + 0,7309 – 0,7309 X_1$

$X_1 = -0,5051 X_1 + 0,7309$

$X_1 + 0,5051 X_1 = 0,7309$

$1,5051 X_1 = 0,7309$

$X_1 = 0,4856$

$X_2 = 1- X_1$

$X_2 = 1 – 0,4856$

$X_2 = 0,5144$