TEORI ANTRIAN

Riset Operasional

Riset operasional merupakan cabang interdisiplin dari matematika terapan dan sains formal yang menggunakan model-model—seperti model matematika, statistika, dan algoritma untuk mendapatkan nilai optimal atau nyaris optimal pada sebuah masalah yang kompleks.

Riset Operasional merupakan suatu metode, teknik, peralatan dan cara manajemen yang digunakan oleh seorang manajer untuk menyelesaikan masalah-masalah yang sering muncul dalam kegiatan-kegiatan sehari-hari.

Riset operasional biasanya digunakan untuk mencari nilai maksimal (profit, performa lini perakitan, hasil panen, bandwith dll) atau nilai minimal (kerugian, risiko, biaya, dll) dari sebuah fungsi objektif. Sehingga akhirnya permasalahan tersebut dapat dipecahkan secara optimal.

Model Antrian

Sistem ekonomi dan usaha (bisnis) sebagian besar beroprasi dengan sumber daya yang relatif terbatas. Sering terjadi orang –orang, barang – barang, komponen-komponen, atau kertas kerja harus menunggu untuk mendapatkan jasa pelayanan. Garis-garis tunggu ini sering disebut dengan antrian (Queues), berkembang karna kualitas pelayanan (server) adalah relatif mahal untuk memenuhi permintaan layanan dan sangat terbatas.

Tujuan dasar model antrian

a. *Meminimumkan biaya langsung*

Biaya langsung adalah biaya yang timbul akibat lamanya waktu pelayanan yang secara langsung membebani perusahaan. Contohnya, pembengkakan biaya akibat waktu ini adalah pekerja yang dibayar perjam dan diharuskan melayani sejumlah pelanggan, perusahaan harus membayar pekerja tersebut persatuan waktu.

b. Meminimumkan biaya tidak langsung

Biaya tidak langsung adalah terjadi apabila pelanggan harus menunggu lama sehingga mungkin membatalkan niat memakai jasa perusahaan tersebut.

Elemen – elemen pokok dalam antrian

- ***Sumber masukan.***

Sumber masukan terdiri atas suatu populasi orang,barang, komponen atau kertas kerja yang datang pada suatu sistem untuk dilayani.

- ***Pola kedatangan.***

Individu – individu mungkin datang dengan tingkat kedatangan yang konstan ataupun random. Tingkat kedatangan produk-produk yang bergerak sepanjang lini perakitan produksi massa mungkin konstan, sedangkan tingkat kedatangan mengikuti distribusi probabilitas poison. Distribusi probabilitas poison adalah salah satu pola kedatangan yang paling sering bila kedatangan-kedatangan didistribusikan secara random.

Elemen – elemen pokok dalam antrian

- ***Disiplin antrian***

Model-model yang disajikan disini dibatasi untuk disiplin antrian Fist come, fist served (FCFS).

- ***Kepanjangan antrian***

Apabila kapasitas antrian menjadi faktor pembatas besarnya jumlah individu yang dapat dilayani dalam sistem secara nyata, berarti sistem mempunyai kepanjangan antrian yang terbatas (finite). Sebagai contoh sistem yang mempunyai antrian yang terbatas adalah jmlah tempat perkir atan station pelayanan.

- ***Tingkat pelayanan***

Waktu yang digunakan untuk melayani individu-individu dalam suatu sistem di seuat waktu pelayanan (servise time).

Contoh Antrian

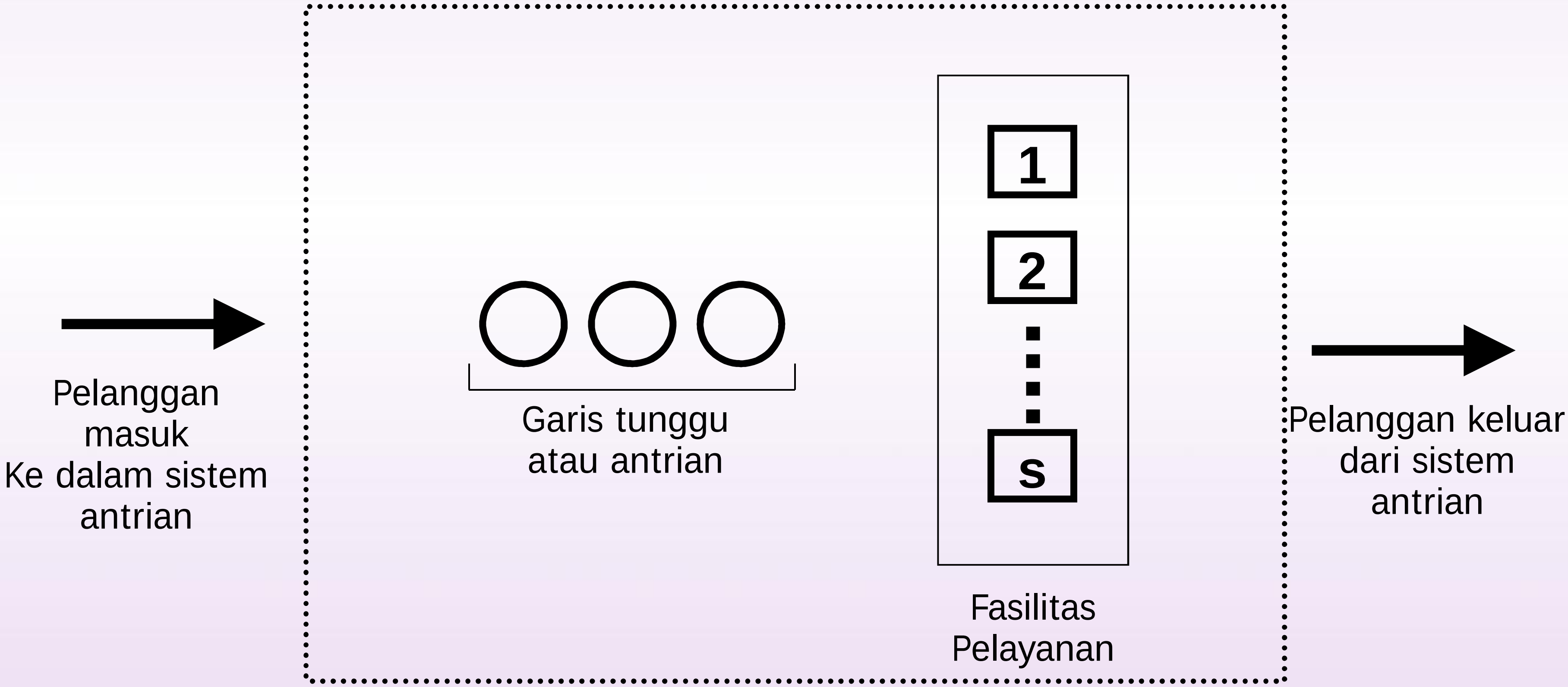
1. *Pelanggan menunggu pelayanan di kasir*
2. *Mahasiswa menunggu konsultasi dengan pembimbing*
3. *Mahasiswa menunggu registrasi dan pembayaran SPP*
4. *Penumpang kereta api menunggu pelayanan loket penjualan karcis*
5. *Pengendara kendaraan menunggu pengisian bahan bakar*
6. *Beberapa produk atau komponen menunggu untuk di selesaikan*

CONTOH SISTEM ANTRIAN

Sistem	***Garis tunggu atau antrian***	***Fasilitas***
1. Lapangan terbang	*Pesawat menunggu di landasan*	*Landasan pacu*
2. Bank	*Nasabah (orang)*	*Kasir*
3. Pencucian Mobil	*Mobil*	*Tempat pencucian mobil*
4. Bongkar muat barang	*Kapat dan truk*	*Fasilitas bongkar muat*
5. Sistem komputer	*Program komputer*	*CPU, Printer, dll*
6. Bantuan pengobatan darurat	*Orang*	*Ambulance*
7. Perpustakaan	*Anggota perpustakaan*	*Pegawai perpustakaan*
8. Registrasi mahasiswa	*Mahasiswa*	*Pusat registrasi*
9. Skedul sidang pengadilan	*Kasus yang disidangkan*	*Pengadilan*

Stuktur Model Antrian

1. *Garis tunggu atau sering disebut antrian (queue)*
2. *Fasilitas pelayanan (service facility)*



STUKTUR SISTEM ANTRIAN

STRUKTUR ANTRIAN

Proses antrian pada umumnya dikelompokkan ke dalam empat struktur dasar menurut sifat-sifat fasilitas pelayanan, yaitu:

1. *Single Channel - Single Phase (satu saluran satu tahap)*
2. *Single Channel - Multi Phase (satu saluran banyak tahap)*
3. *Multi Channel - Single Phase (banyak saluran satu tahap)*
4. *Multi Channel - Multi Phase (banyak saluran banyak tahap)*

Notasi dalam sistem antrian

n = jumlah pelanggan dalam sistem

Pn = probabilitas kepastian n pelanggan dalam sistem

λ = jumlah rata-rata pelanggan yang datang persatuan waktu

µ = jumlah rata-rata pelanggan yang dilayani per satuan waktu

Po = probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem

p = tingkat intensitas fasilitas pelayanan

L = jumlah rata-rata pelanggan yang diharapkan dlm sistem

Lq = jumlah pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian

Notasi dalam sistem antrian

W = waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem

Wq = waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama menunggu dalam antrian

1/μ = waktu rata-rata pelayanan

1/λ = waktu rata-rata antar kedatangan

S = jumlah fasilitas pelayanan

Single Channel - Single Phase (satu saluran satu tahap)

Model yang paling sederhana yaitu model saluran tunggal atau sistem M/M/1

1. *Populasi input tak terbatas*
2. *Distribusi kedatangan pelanggan potensial mengikuti distribusi poisson*
3. *Disiplin pelayanan mengikuti FCFS*
4. *Fasilitas pelayanan terdiri dari saluran tunggal*
5. *Distribusi pelayanan mengikuti distribusi poisson*
6. *Kapasitas sistem diasumsikan tak terbatas*
7. *Tidak ada penolakan maupun pengingkaran*

Rumus

1 $$P = \frac{\lambda}{\mu}$$

2 $$P_n = P^n (1 - P)$$

3 $$L = \frac{P}{1 - P} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

4 $$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{P^2}{1 - P}$$

5 $$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

6 $$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Contoh

PT CIARD mengoperasikan satu buah pompa bensin dengan satu operator. Rata-rata tingkat kedatangan kendaraan mengikuti distribusi poisson yaitu 20 kendaraan per jam. Operator dapat melayani rata-rata 25 mobil per jam, dengan waktu pelayanan setiap mobil mengikuti distribusi probabilitas eksponensial. Jika diasumsikan model sistem antrian yang digunakan operator tersebut (M/M/1), hitunglah :

1. Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan (p)
2. Jumlah rata-rata kendaraan yang diharapkan dalam sistem
3. Jumlah kendaraan yang diharapkan menunggu dalam antrian
4. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan selama dalam sistem (menunggu pelayanan)
5. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan untuk menunggu dalam antrian

Penyelesaian

λ = 20 dan μ = 25

1. Tingkat intenstas (kegunaan) pelayanan atau p

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0{,}80$$

Angka tsb menunjukkan bahwa operator akan sibuk melayani kendaraan selama 80% dari waktunya. Sedangkan 20% dariwaktunya (1 – p) yang sering disebut idle time akan digunakan operator untuk istirahat, dll

2

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{25 - 20} = 4, \textit{atau}$$

$$L = \frac{p}{1 - p} = \frac{0{,}80}{1 - 0{,}80} = 4$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa operator dapat mengharapkan 4 mobil yang berada dalam sistem

3

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(20)^2}{25(25-20)} = \frac{400}{125} = 3{,}20$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa mobil yang menunggu untuk dilayani dalam antrian sebanyak 3,20 kendaraan

4

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{25-20} = \frac{1}{25} = 0{,}20 \text{ jam atau } 12 \text{ menit}$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam sistem selama 12 menit

5

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{25(25-20)} = \frac{20}{125} = 0{,}16 \text{ jam atau } 9{,}6 \text{ menit}$$

Angka tersebut menunjukkan bahwa waktu rata-rata kendaraan menunggu dalam antrian selama 9,6 menit

Hubungan antara L, Lq, W dan Wq

- $L = \lambda W$
- $Lq = \lambda Wq$
- $W = Wq + 1/\mu$

MULTIPLE-CHANNEL MODEL (M/M/s)

Dalam Multiple-Channel Model, fasilitas yang dimiliki lebih dari satu. Huruf (s) menyatakan jumlah fasilitas pelayanan

Contoh

Sebuah rumah sakit memiliki ruang gawat darurat (RGD) yang berisikan tiga bagian ruangan yang terpisah untuk setiap kedatangan pasien. Setiap ruangan memiliki satu orang dokter dan satu orang jururawat. Secara rata-rata seorang dokter dan jururawat dapat merawat 5 orang pasien per jam. Apabila pasien yang dihadapi hanya luka-luka ringan, mereka dapat melayani 12 pasien per jam. Laporan pihak statistik pasien pada rumah sakit tersebut menunjukkan bahwa kedatangan dan penyelesaian pelayanan mengikuti distribusi Poisson.

Sistem : (M/M/3)
$\lambda = 12$ $s = 3$
$\mu = 5$
$p = 12/3(5) = 0{,}8$

Model UGD

μ = rata-rata tingkat pelayanan untuk setiap fasilitas pelayanan

$$p = \frac{\lambda}{\mu\, s}$$

$$P_o = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!(1 - \frac{\lambda}{s\mu})} \right\}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}(P_o), \; \textit{jika} \;\; 0 \le n \le s \\ \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s!\,s^{n-s}}(P_o), \; \textit{jika} \;\; n \ge s \end{cases}$$

$$Lq = \frac{P_o(\frac{\lambda}{\mu})^s p}{s!(1-p)^2} =$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

$$W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$$

Penyelesaian

$$Lq = \frac{P_o\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p}{s!(1-p)^2} = \frac{0{,}20\left(\frac{12}{5}\right)^5\left(\frac{12}{15}\right)}{3!\left(1-\frac{12}{15}\right)^2} = \frac{0{,}20(13{,}824)(0{,}80)}{6(0{,}04)}$$

$$Lq = \frac{2{,}21184}{0{,}24} = 9{,}216 \quad \text{pasien}$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{9{,}216}{12} = 0{,}768 \quad \text{jam atau } 46 \text{ menit}$$

$$W = Wq + \frac{1}{\mu} = 0{,}768 + \frac{1}{5} = 0{,}968 \quad \text{jam atau } 58 \text{ menit}$$

$$L = \lambda W = 12(0{,}968) = 11{,}62$$